

Alcuni aspetti della tecnica di krigaggio nella valutazione dei tenori di un giacimento

ANTONIO MAZZELLA

Istituto di Giacimenti Minerari, Geofisica e Geologia Applicata della Facoltà di Ingegneria,
Piazza d'Armi, 09100 Cagliari

RIASSUNTO. — Nel presente lavoro viene analizzato quale sia l'errore di valutazione commesso con l'uso delle tecniche geostatistiche in un caso teorico elementare, qualora al significato geogiamentologico dei dati venga dato un valore subordinato e non discriminante. Viene infatti presentato un gruppo di dati costituito in parte da numeri casuali, la parte rimanente da dati con un forte «trend». Questo gruppo potrebbe rappresentare i campioni di un ipotetico giacimento in cui la parte aleatoria (dati casuali) sarebbe quella zona del corpo in esame che abbia subito ad esempio, fenomeni alternativi posteriori alla sua deposizione primaria; mentre quella parte con una forte continuità (trend) rappresenta invece la zona inalterata. Tutti i dati sono stati trattati con le tecniche geostatistiche per ottenere una valutazione di questo ipotetico giacimento.

Per prima cosa sono stati calcolati i semivariogrammi sperimentali, nelle direzioni 0° e 90° quindi si è passati alla stima dei blocchi del giacimento, utilizzando differenti schemi di krigaggio per ottenere una valutazione che fosse affetta da un errore minimo in quanto i dati non sono discriminabili con le sole tecniche statistiche, dal momento che l'istogramma non presenta alcuna tendenza alla bimodalità. I dati pertanto sono stati trattati secondo due vie: considerandoli come popolazione omogenea nel primo caso, discriminandoli secondo i due gruppi componenti nel secondo. Si riesce ad ottenere una stima affetta da errori molto bassi nel secondo caso, ossia tenendo nel debito conto le caratteristiche del giacimento.

Parole chiave: geostatistica, valutazione, krigaggio, dati non omogenei, correzione della stima.

SOME ASPECTS OF KRIGING TECHNIQUE IN THE EVALUATION OF GRADES IN AN ORE BODY

ABSTRACT. — In this paper the evaluation error made using geostatistic technique in a very simple and theoretical case is analysed. In fact it is presented a set of data constituted from two subset of data random and structured digits.

These data may represent the samples from an ore-body locally affected by alteration phenomena, where the random part could represent this altered part. The geostatistical evaluation of this hypothetical ore-body was made according to different kriging schemes in order to find the evaluation with the minimum error, because, although the data are not homogeneous, it was not possible to split the two different groups with only by mean of the statistical methods, so all the data were considered as homogeneous ones.

Thus the author shows the differences between the two following cases data considered either as homogeneous or as different ones. This second case, that take into account the actual characteristics of the ore body, gives the lowest error.

Key words: geostatistics, economic geology, kriging, non homogeneous data, evaluation corrections.

Introduzione

È già stato rilevato (A. MAZZELLA et al., 1983) che un rischio nell'uso della geostatistica è quello di una non corretta interpretazione dei risultati, qualora non venga dato il giusto peso alle conoscenze geogiamentologiche del corpo di cui si voglia eseguire la valutazione. In effetti l'uso di queste tecniche è stato finora appannaggio di specialisti che, per loro formazione culturale non strettamente giamentologica, vedono i dati provenienti dal giacimento come dei semplici numeri. Il problema fondamentale è quello del comportamento delle variabili regionalizzate (quindi non aleatorie: MATHERON, 1970) caratteristiche dei corpi geologici (tenore, potenza ecc.) e l'impossibilità di una rappresentazione puramente matematico-statistica dei fenomeni giamentologici.

Si ricordano brevemente i concetti di variabile aleatoria (V.A.) e di quella regionalizzata (V.R.). La prima è una variabile che può prendere qualunque valore in qualunque punto dello spazio senza seguire altra legge se non quella del caso. La V.R. è invece regolata da una legge, peraltro incognita, che è esclusivamente funzione dello spazio: diviene pertanto importante anche la posizione del punto cui il valore è legato.

bile un loro accumulo; questo sarebbe in contrasto con il concetto di casualità; ma sarebbe in buon accordo con il concetto di V.R.

Ci si può forse più correttamente approssimare ad una variabile casuale quando si è in presenza di una disseminazione a basso tenore, oppure nel caso in cui sul giacimento originario abbiano agito successivi, numerosi processi evolutivi, che abbiano alterato e

TABELLA 1
Tabella dei dati aleatori — Random data

1.11	3.63	7.05	3.76	2.63	7.51	1.04	2.04	1.92	9.17	2.42	9.75	7.68	5.86	8.7	3.16	9.32	4.36	1.97	.84
4.95	1.28	1.4	9.31	7.84	7.27	6.87	1.8	2.5	4.1	6.42	4.82	4.17	7.31	3.32	4.23	8.3	2.19	9.28	.47
6.52	9.71	1.21	5.30	9.46	1.58	1.68	6.1	4.35	1.7	1.72	5.73	3.82	2.93	3.13	3.13	3.49	6.56	9.85	2.95
6.24	9.92	8.49	2.87	1.91	1.47	2.47	2.8	6.88	3.84	2.42	6.34	2.42	.7	9.27	3.72	1.32	3.74	1.04	3.64
9.61	9.50	2.74	7.29	.84	7.81	4.84	2.6	5.87	.53	2.96	6.65	6.29	1.24	2.02	1.4	.4	3.57	.39	.3
6.76	.52	3.06	4.48	9.69	6.84	8.56	4.55	3.54	9.95	6.4	9.0	1.46	4.02	.94	6.28	.15	8.22	9.14	3.24
9.69	5.52	7.06	2.52	4.	2.32	4.88	.71	6.01	8.16	.91	7.48	9.73	8.87	5.13	7.31	9.82	7.86	2.75	2.07
1.	7.5	8.6	4.11	1.	1.96	.35	6.84	5.78	5.79	9.24	6.54	1.65	.55	1.06	8.81	3.01	8.47	1.01	6.92
.74	5.88	9.6	8.89	5.13	7.09	9.67	7.43	2.71	2.96	3.52	2.79	2.89	5.5	2.69	4.81	.41	3.6	6.53	1.25
4.07	8.63	4.84	6.52	9.12	4.59	4.53	5.48	7.79	4.11	4.32	1.26	1.81	8.46	9.4	8.24	1.51	7.68	8.6	4.79

TABELLA 2
Tabella dei dati strutturati — Structured data

.5	1.2	1.99	3.06	4.22	5.01	6.33	6.99	7.9	9.21
1.	1.44	2.5	3.29	4.3	5.62	6.2	6.81	8.12	9.38
1.8	2.15	2.83	3.66	4.58	6.01	6.22	6.93	8.44	8.69
3.07	3.12	3.55	4.18	5.	6.6	6.69	7.48	8.72	9.01
4.1	4.37	4.77	5.19	5.59	6.81	7.55	8.33	9.31	9.21
5.02	5.15	5.29	5.88	6.43	7.2	8.18	8.88	9.42	9.6
5.93	5.52	7.01	7.22	7.97	8.4	8.4	9.78	9.98	10.01
7.01	6.9	8.18	8.33	8.77	9.57	9.69	9.84	10.1	10.9
8.23	8.55	8.64	9.32	9.4	9.77	9.99	10.05	10.98	11.2
8.95	9.37	9.79	10.	10.05	10.3	10.9	11.	11.2	11.4

Vediamo ora, a monte di quanto detto precedentemente, quanto accade in natura. Esistono casi particolari in cui si potrebbe pensare che il tenore segua un andamento casuale: ad esempio, i giacimenti auriferi alluvionali (placers). In effetti anche in questo caso non si può pensare ad una legge di distribuzione del tutto casuale; in quanto le particelle d'oro tenderanno quanto meno ad accumularsi maggiormente in quelle zone dove la forza viva del mezzo che le trasportava era minore (legame spaziale). Quindi con una ricostruzione del paleoalveo è possibile ottenere le aree nelle quali è più proba-

modificato, in più punti e con intensità variabile, la distribuzione primitiva della variabile in esame (tenore). Pertanto nelle mineralizzazioni non totalmente interessate da questi fenomeni successivi ci si può trovare, in pratica, davanti ad un corpo minerario in cui una parte, non toccata da variazioni, segue la legge di distribuzione originaria; mentre il rimanente si potrebbe comportare, almeno apparentemente, in maniera casuale. Può succedere che il risultato della campionatura nell'intero corpo mostri all'analisi statistica un'omogeneità di popolazione; pertanto sorgerebbe, in questo caso, il problema

della correttezza della valutazione in quanto si avrebbe una popolazione di dati in realtà non omogenea, dove le tecniche statistiche e geostatistiche non sono in grado di separare le diverse distribuzioni. È necessario quindi utilizzare le conoscenze geogiacimentologiche per discriminare tali distribuzioni, o quantomeno per ridurre l'errore di valutazione nel caso in cui ciò non fosse possibile.

I risultati sono i seguenti:

— dati casuali (fig. 1): come si può chiaramente vedere il semivariogramma sperimentale ha un andamento orizzontale. Questa tendenza conferma che la distribuzione dei dati è aleatoria;

— dati strutturati (fig. 2): la curva in questo caso è una parabola. Ciò porta a dire che i dati hanno una forte correlazione

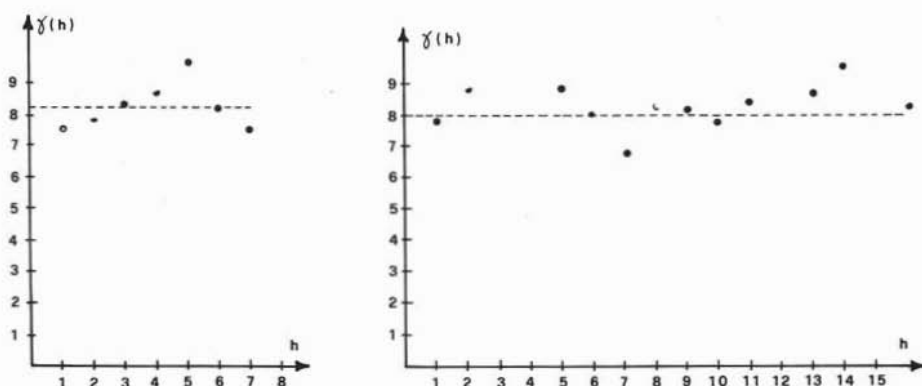


Fig. 1. — Semivariogramma sperimentale dei dati aleatori nelle direzioni 0° e 90°. Sono stati indicati con i punti pieni i valori del semivariogramma sperimentale, a tratteggio quello modello. — Experimental semivariogram of random data in 0° and 90° directions. The experimental (points) and the model (dotted) curves are represented.

Caratteristiche dei dati utilizzati e loro proprietà

Per dimostrare l'importanza di quanto detto in precedenza sono stati presi dei dati tali da rappresentare un giacimento minerario in cui coesistano due leggi in distribuzione differenti. Pertanto si è immaginato un corpo in cui sia presente una zona inalterata ed un'altra che abbia subito un rimaneggiamento successivo. Per poter ottenere quanto detto si è supposto che nella parte inalterata del corpo il tenore cresca con continuità lungo una direzione; si è quindi pensato di rappresentare questa parte del giacimento con una serie di dati che avessero un « trend » lungo la diagonale (tab. 2), mentre per la parte alterata si è fatto ricorso ad una serie di dati aleatori (tab. 1).

Dalle due tabelle di dati, sopra introdotte, sono stati calcolati i semivariogrammi lungo le direzioni 0° e 90° (lungo le righe e lungo le colonne delle tabelle), per verificare le condizioni di isotropia o anisotropia del tenore secondo le due distribuzioni.

spaziale (confermando quanto imposto dal « trend » diagonale).

Sono stati anche tracciati gli istogrammi delle due serie di dati che sono riportati nelle figg. 1 a e 1 b.

Dopo queste analisi che hanno evidenziato la sostanziale isotropia delle distribuzioni dei tenori si è provveduto all'unione delle due matrici di dati per la creazione dell'ipotetico corpo minerario con le caratteristiche sopra descritte.

Vediamo se e come si sono modificate le curve dopo questa unione delle due tabelle. L'istogramma riportato in fig. 3 a non è molto dissimile come andamento da quello di fig. 1 a (relativo ai soli dati aleatori). Non si vede alcuna tendenza alla bimodalità (che farebbe pensare alla presenza di due serie di dati con differente distribuzione) come sarebbe logico aspettarsi, data la reale disomogeneità delle due distribuzioni.

I semivariogrammi sperimentali di questa nuova tabella di valori (tab. 1 + tab. 2) nelle stesse direzioni 0° e 90° sono riportati

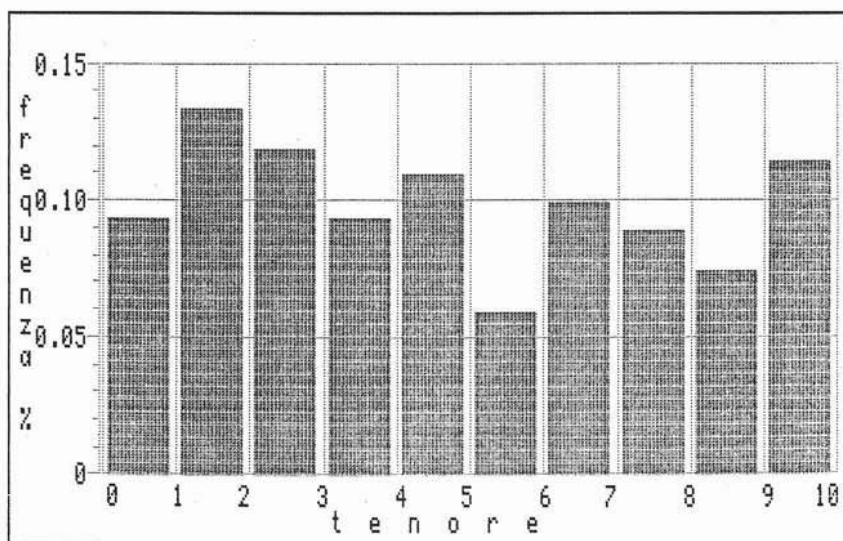


Fig. 1 a. — Istogramma dei dati aleatori. — Histogram of random data.

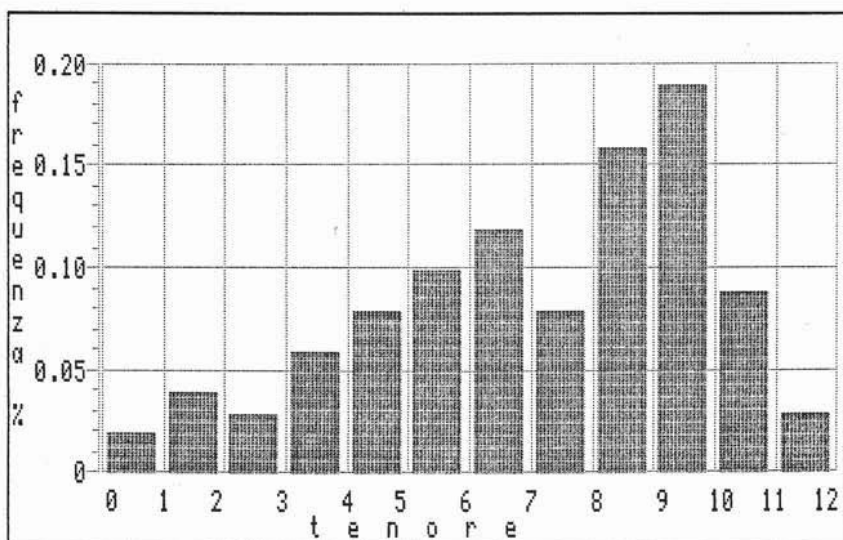


Fig. 1 b. — Istogramma dei dati strutturati. — Histogram of structured data.

in fig. 3. Dalle curve sperimentali si nota che il semivariogramma è di tipo transitivo (cresce in prossimità dell'origine fino a raggiungere un certo valore ad $h = 9$, che rimane pressoché costante). Quindi questo semivariogramma è perfettamente modellizzabile con un modello come quello tratteggiato nella stessa figura. In conclusione non ricorrendo ad ulteriori controlli (ad esempio mediante la tecnica dello « scanning » (MAZZELLA et al., 1984 b); i dati di cui in prece-

denza è stata fatta ampia descrizione verrebbero valutati come appartenenti ad una popolazione omogenea.

Per vedere quali errori saranno commessi a causa di questa non perfetta analisi dei dati, nel prosieguo si procederà al calcolo dei tenori stimati, nei seguenti due modi:

- considerando i dati come appartenenti ad una popolazione omogenea;
- considerando i dati come appartenenti a differenti popolazioni.

Presentazione degli schemi di krigaggio e del calcolo dei ponderatori

Rinviando alle pubblicazioni generali per una trattazione più dettagliata (G. MATHERON, 1970; M. DAVID, 1977; M. GUARASCIO, 1974; A. JOURNEL e CH. HUIJBREGTS, 1978) ricordiamo che:

— *semivariogramma* è la curva ottenuta calcolando la media quadratica delle differenze tra tutti i campioni, presi a coppie, a varie distanze (lags) lungo una stessa direzione che dà un'idea della correlazione spaziale esistente tra i campioni in esame (regionalizzazione);

— *krigaggio* è la tecnica geostatistica per il calcolo di una stima. Si può considerare come una tecnica di calcolo a media pesata, dove i pesi, chiamati, in questo lavoro, λ , sono di seguito definiti;

— λ sono i ponderatori per il calcolo della stima di una certa parte di giacimento (blocco) ed hanno la particolarità che possono anche assumere valori negativi e la loro somma è uguale a uno. Questi ponderatori, e qui sta l'originalità del metodo, vengono determinati sulla base della legge di distribuzione spaziale della grandezza (in questo caso tenore) in esame, cioè utilizzando il semivariogramma.

Vediamo ora di calcolare i tenori dei vari blocchi con due schemi di krigaggio differenti, intendendo con questo termine il nu-

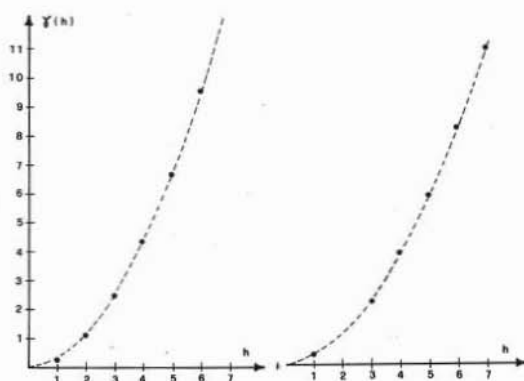


Fig. 2. — Semivariogramma sperimentale dei dati strutturati nelle direzioni 0° e 90° . Sono stati indicati con i punti pieni i valori del semivariogramma sperimentale, a tratteggio quello modello. — Experimental semivariogram of structured data in 0° and 90° directions. The experimental (points) and the model (dotted) curves are represented.

mero e la posizione spaziale dei campioni che saranno utilizzati per la stima di un blocco.

Schema di krigaggio a nove campioni

In fig. 4 viene presentato il primo « schema di krigaggio » utilizzato. Per il calcolo delle stime dei blocchi è stato utilizzato il programma P-Krige (A. MAZZELLA, 1986), che permette di ottenere i coefficienti λ dato

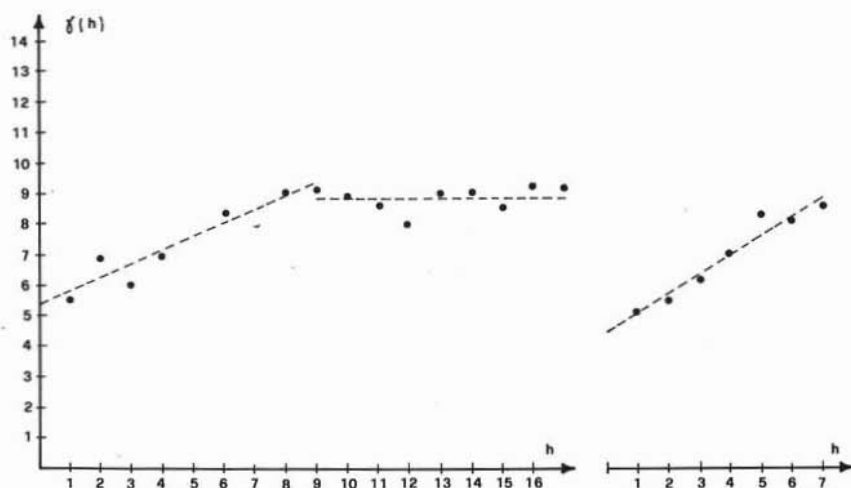


Fig. 3. — Semivariogramma dei dati aleatori e di quelli strutturati, presi insieme, nelle direzioni 0° e 90° . Sono stati indicati con i punti pieni i valori del semivariogramma sperimentale, a tratteggio quello modello. — Experimental semivariogram of both random and structured data in 0° and 90° directions. The experimental (points) and the model (dotted) curves are represented.

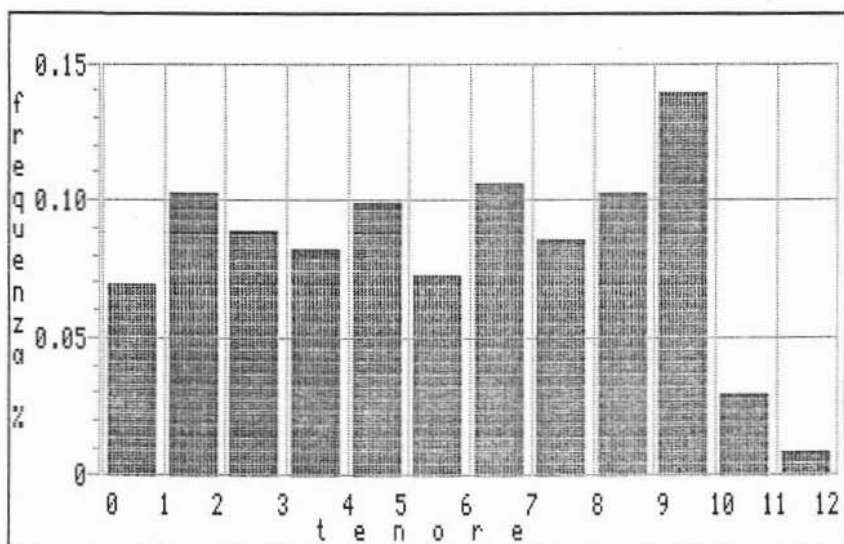


Fig. 3 a. — Istogramma dei dati aleatori e di quelli strutturati considerati come facenti parte di una popolazione omogenea. — Histogram of the data from tables 1 and 2 considered as homogeneous.

il modello del semivariogramma ed uno schema di krigaggio. Le equazioni dei modelli dei semivariogrammi utilizzati per i calcoli dei λ sono:

— nel caso dei soli dati strutturati:

$$\text{Gamma}(h) = 0,29 |h|^{1,95};$$

— per i soli dati aleatori:

$$\text{Gamma}(h) = 8,05;$$

— per l'insieme dei dati aleatori e strutturati (considerati come omogenei):

$$\text{Gamma}(h) = \begin{cases} 5,37 + 0,44 * h & |h| < 9 \\ 8,84 & |h| > 9 \end{cases}$$

Vediamo i risultati ottenuti nei vari casi.

Caso in cui la valutazione viene fatta con tutti i dati considerati come appartenenti ad una popolazione omogenea - I valori dei λ sono i seguenti, avendo dato come indice quello relativo alla posizione del punto nello schema di krigaggio (fig. 4):

$$\lambda_1 = \lambda_3 = \lambda_7 = \lambda_9 = 0,051$$

$$\lambda_2 = \lambda_4 = \lambda_6 = \lambda_8 = 0,130$$

$$\lambda_5 = 0,277$$

$$\mu = 0,223$$

I risultati del krigaggio così ottenuti sono raccolti nella tab. 3, indicati con il cerchio pieno. Come si può notare sono stati tabellati i valori di 9 blocchi per riga.

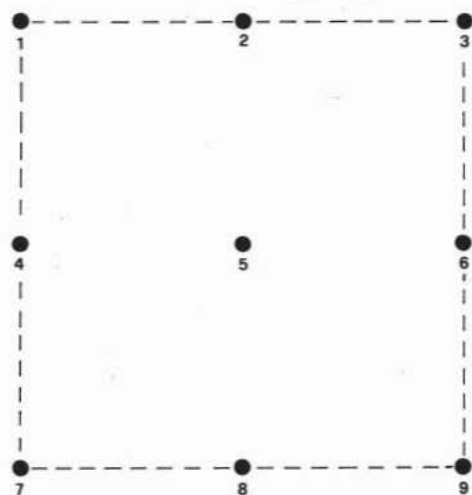


Fig. 4. — Schema di krigaggio a 9 punti con a tratteggio il blocco da valutare. — Kriging scheme with the 9 samples, which evaluate the dotted line block.

Caso in cui le valutazioni sono state fatte considerando i dati appartenenti a popolazioni differenti

a) parte « strutturata » (ultime tre co-

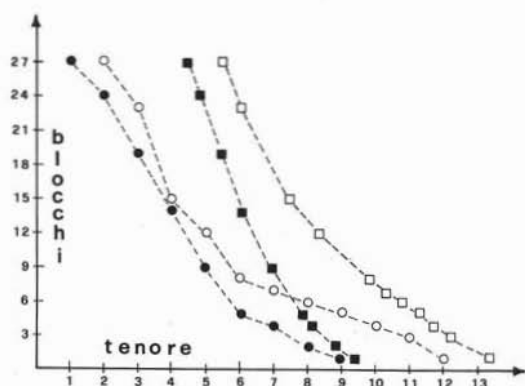


Fig. 5. — Grafico relativo alla tabella 3. I simboli indicano: ● = curva tenore cut-off/numero blocchi nel caso di dati considerati come provenienti da una stessa popolazione; ○ = stessa curva della precedente ma nel caso di dati considerati come provenienti da due popolazioni differenti; ■ = curva numero blocchi/tenore medio nel caso di dati considerati come provenienti da una stessa popolazione; □ = stessa curva della precedente ma nel caso di dati considerati come provenienti da due popolazioni differenti. — Curves from table 3. Meaning of symbols: ● = curve cut-off grade vs number of blocks in homogeneous case; ○ = same curve but in non homogeneous case; ■ = curve number of block vs average grade in homogeneous case; □ = same curve but in non homogeneous case.

lonne di blocchi in tab. 3). I valori dei coefficienti λ sono, avendo usato gli stessi indici visti in precedenza:

$$\lambda_1 = \lambda_3 = \lambda_7 = \lambda_9 = 0,026$$

$$\lambda_2 = \lambda_4 = \lambda_8 = 0,14$$

$$\lambda_5 = 0,34$$

$$\mu = 0,04$$

Da una prima analisi dei valori dei λ nei due casi, per gli stessi blocchi, si nota una certa differenza; il che fa già immaginare che le due valutazioni saranno differenti, come c'era da aspettarsi.

b) Parte « aleatoria » (prime sei colonne di blocchi nella tab. 3). I pesi relativi alla valutazione della sola parte aleatoria sono, ovviamente, tutti uguali al valore $\lambda = 1/9$; cioè il valore di un blocco è pari alla media aritmetica dei valori concorrenti a valutarlo.

Veniamo alla lettura dei risultati raccolti nella tab. 3. Questa tabella deve essere letta a gruppi di tre righe. Su ciascuno di essi la prima riporta le valutazioni fatte nel

caso in cui non si siano distinti i due gruppi di dati, ed è indicata con un cerchio pieno. Nella seconda riga sono indicati i valori ottenuti dopo aver separato le due serie di dati (cerchio vuoto). Un fatto che bisogna subito evidenziare è che nella tabella manca un blocco. Infatti sono stati riportati solo 9 valori; mentre, considerando il fatto che la dimensione del pannello di partenza era costituito da 20 dati « aleatori » più 10 « strutturali », ci si sarebbe aspettato di trovare 10 blocchi valutati. Questo è dovuto al fatto che, dividendo in blocchi di tre campioni per lato la matrice dei dati da valutare, si sarebbe ottenuto un blocco costituito da tre dati aleatori e sei strutturati; pertanto questo blocco lo si è tralasciato in quanto sarebbe stato piuttosto complesso ottenere una valutazione che si potesse considerare « corretta » e da poter usare come termine di

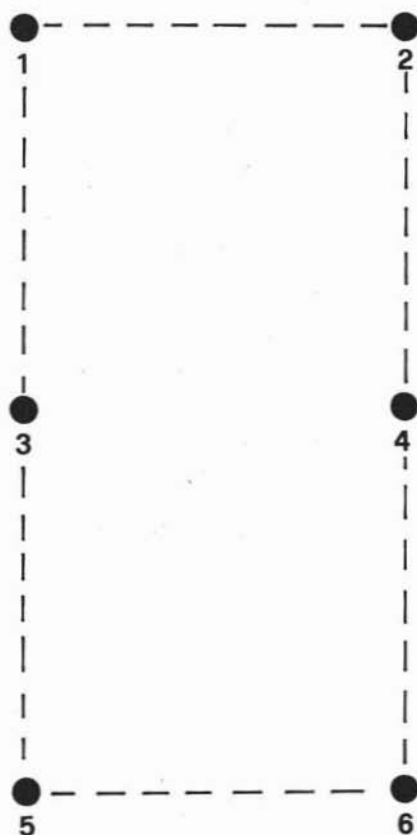


Fig. 6. — Schema di krigaggio a 6 punti con a tratteggio il blocco da valutare. — Kriging scheme with the 6 samples, which evaluate the dotted line block.

paragone nella tabella in parola. Quindi abbiamo che i primi 6 valori sono relativi ai blocchi che ricadono totalmente nei dati aleatori; mentre gli ultimi 3 di ciascuna riga sono quelli costituiti da soli dati strutturali.

La terza riga di ciascuna terna, indicata con un triangolo, dà l'errore percentuale commesso, considerando come corretta la valutazione ottenuta con la separazione dei dati. Analizzando l'andamento di quest'ultimo valore si nota come in media l'errore maggiore viene commesso nella zona strutturata, mentre l'errore di valutazione più elevato viene commesso nella valutazione del sesto blocco della seconda riga, cioè nella zona dei dati aleatori, caso del tutto fortuito. Un fatto importante è che l'errore segue sempre la legge del caso; questo è legato al fatto che in tutte le valutazioni, anche in quelle che ricadono nella zona strutturata, entrano nel computo dati della tabella aleatoria, dando un andamento casuale alla stima e di conseguenza all'errore. Altro fatto che è subito evidente è la sottostima, presente in quasi tutte le valutazioni riportate in tabella, delle valutazioni dei dati considerati come omogenei rispetto al caso « corretto » di separazione dei dati in due gruppi. Questo fatto è da legare alle caratteristiche dei dati dell'esempio utilizzato per questo lavoro. Studi che

si stanno conducendo presso l'Istituto di Giacimenti Minerari di Cagliari dimostrano che sono molto importanti a questo proposito i parametri statistici dei dati (la media, la deviazione standard, il coefficiente di dispersione ecc.) e la posizione relativa dei dati aleatori rispetto a quelli strutturati.

Per meglio evidenziare i risultati della tab. 3 è stata riportata in fig. 5 una curva tenore/cubaggio in cui è riportato il numero dei blocchi in funzione di vari tenori di economicità (tenore di cut-off) per la situazione di tab. 3, che mostra ancor più chiaramente il fenomeno di sottostima sopra descritto.

Schema di krigaggio a sei campioni

Supponiamo ora di modificare lo schema di krigaggio, prendendo quello riportato in fig. 6. Calcolando i coefficienti λ come visto precedentemente otteniamo:

Caso di valutazione con i dati considerati come appartenenti ad una popolazione omogenea

I valori dei λ in questo caso sono, utilizzando al solito come indici quelli della figura suddetta:

TABELLA 3
Risultati del krigaggio ottenuto utilizzando lo schema a 9 campioni di fig. 4
Kriging results of 9 samples scheme of fig. 4

● 3.721	6.822	3.232	4.810	5.323	5.672	2.444	5.437	8.093
○ 4.095	6.075	3.144	5.092	5.213	4.197	3.05	7.549	11.17
△ -.09	.12	.03	-.06	.02	.35	-.20	-.28	-.28
● 6.839	4.5	4.155	3.966	2.752	2.059	4.452	6.723	8.992
○ 6.315	4.8	4.678	4.443	3.151	3.2	6.452	9.267	12.408
△ .8	-.06	-.11	-.10	-.13	-.36	-.31	-.27	-.27
● 6.181	3.308	4.928	5.817	3.409	5.007	7.833	9.227	10.301
○ 8.176	4.113	4.931	5.254	4.23	6.011	10.863	12.698	14.275
△ -.24	-.20	.00	.11	-.19	-.17	-.28	-.27	-.28

In questa tabella sono indicati con: ● = i tenori dei blocchi, considerando i dati delle tabb. 1 e 2 come appartenenti ad una popolazione omogenea; ○ = i tenori ottenuti considerando i dati come appartenenti a due popolazioni differenti; quindi utilizzando per i dati aleatori la media aritmetica, per quelli strutturati il krigaggio ottenuto con il semivariogramma modello parabolico di fig. 2; △ = la differenza percentuale tra le prime due righe, considerando come tenore di rapporto quello della seconda. — Kriging results of 9 samples scheme of fig. 4. Meaning of symbols: ● = block-grades from random and structured data considered as homogeneous; ○ = block-grades from random and structured data considered as non homogeneous. So we have for the random data the arithmetic mean value and for the structured data the kriging values; △ = percent differences between the first and the second row of the table.

TABELLA 4

Risultati del krigaggio ottenuto utilizzando lo schema a 6 campioni di fig. 6
Kriging results of 6 samples scheme of fig. 6

● 4.106	4.877	6.502	3.58	3.758	5.286	5.429	4.126	5.565	4.421	1.309	2.89	4.957	6.557	8.661
○ 4.533	4.671	6.048	3.255	3.956	5.143	5.295	4.278	5.703	4.226	1.348	2.891	4.958	6.546	8.679
Δ -.09	.04	.08	.10	-.05	.03	.03	-.04	-.02	.05	-.03	.00	.00	.00	.00
● 7.833	4.879	4.628	4.127	3.48	5.485	3.012	3.267	2.624	2.171	4.167	4.861	6.25	7.878	9.226
○ 7.091	4.821	4.76	4.043	3.601	5.778	2.688	3.938	2.899	2.958	4.187	4.885	6.239	7.891	9.233
Δ .01	.01	.03	.02	-.03	.05	.12	-.17	-.01	-.27	.00	.00	.00	.00	.00
● 4.812	6.663	2.949	4.562	5.398	5.926	3.73	4.958	5.592	3.585	7.002	8.158	9.037	9.667	10.519
○ 5.055	6.796	3.583	4.98	5.218	5.08	4.865	4.968	5.528	3.421	6.992	8.178	9.064	9.687	10.515
Δ -.07	-.02	-.18	-.08	.03	.17	-.23	.00	.01	.05	.00	.01	.00	.00	.00

In questa tabella sono indicati con: ● = i tenori dei blocchi, considerando i dati delle tabb. 1 e 2 come appartenenti ad una popolazione omogenea; ○ = i tenori ottenuti considerando i dati come appartenenti a due popolazioni differenti; quindi utilizzando per i dati aleatori la media aritmetica, per quelli strutturati il krigaggio ottenuto con il semivariogramma modello parabolico di fig. 2; Δ = la differenza percentuale tra le prime due righe, considerando come tenore di rapporto quello della seconda. — Kriging results of 9 samples scheme of fig. 4. Meaning of symbols: ● = block-grades from random and structured data considered as homogeneous; ○ = block-grades from random and structured data considered as non homogeneous. So we have for the random data the arithmetic mean value and for the structured data the kriging values; Δ = percent differences between the first and the second row of the table.

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= \lambda_2 = \lambda_5 = \lambda_6 = 0,116 \\ \lambda_3 &= \lambda_4 = 0,267 \\ \mu &= 0,033\end{aligned}$$

Caso di valutazione con i dati considerati come appartenenti a popolazioni differenti

In questo caso, come già in precedenza, sarà:

a) caso dei dati strutturati. I pesi di krigaggio sono:

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= \lambda_2 = \lambda_4 = \lambda_6 = 0,092 \\ \lambda_3 &= \lambda_5 = 0,315 \\ \mu &= 0,059\end{aligned}$$

b) caso dei dati aleatori. I λ sono in questo caso tutti uguali a 1/6.

I blocchi valutati sono 15 contro i 9 del caso già discusso e non si è presentato l'inconveniente del blocco costituito da valori aleatori e strutturati. Da una prima analisi si nota, nonostante un forte aumento del numero di blocchi, un forte abbassamento degli errori, soprattutto nella zona strutturata. Infatti mentre l'errore medio « assoluto » (errore medio non considerando il segno) nella zona dei dati aleatori in tab. 4 è di 7,97 % (contro quello relativo alla

tab. 3 che è di 36 %) nella parte strutturata ha un errore di 0,267 % (contro quello di 27,1 % del caso precedente). Questi risultati sono stati riportati in grafico nelle figg. 7 a e b. È stato necessario, in questo caso, fare due figure in quanto i valori erano talmente prossimi che le curve non sarebbero state distinguibili nei due casi.

Considerazioni teoriche

Come precedentemente descritto si è riusciti a limitare in maniera piuttosto drastica l'errore di valutazione passando da uno schema di krigaggio a nove punti ad uno schema di sei punti pur restando nelle stesse condizioni, considerando cioè i campioni « omogenei » anche se in realtà non lo sono. Vediamo di comprendere il motivo di questo risultato. Come già detto in precedenza siamo in presenza di un gruppo di dati che hanno un forte trend diagonale. Questo porta ad avere una situazione sbilanciata nella valutazione di un blocco con uno schema di krigaggio di tipo centrato (con un campione al centro) rispetto ad uno del tipo a sei campioni dove praticamente ciascun valore viene mediato da quello che gli sta a fianco;

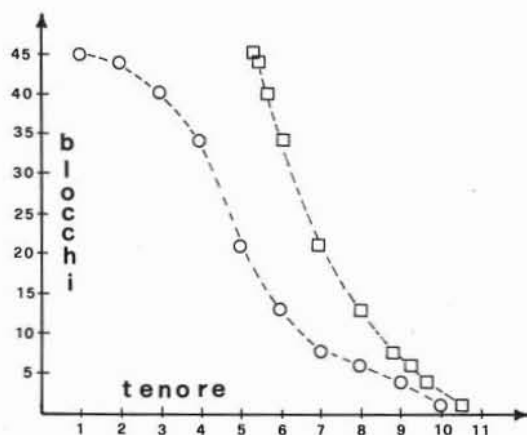


Fig. 7 a. — Curve relative alla riga ● della tab. 4, caso dei dati considerati come provenienti dalla stessa popolazione. Con O è indicata la curva tenore cut-off/numero blocchi. Con □ è indicata la curva numero blocchi/tenore medio. — Curves in the case of data considered as homogeneous. O = Curve cut-off grade vs number of blocks. □ = Curve number of block vs average grade.

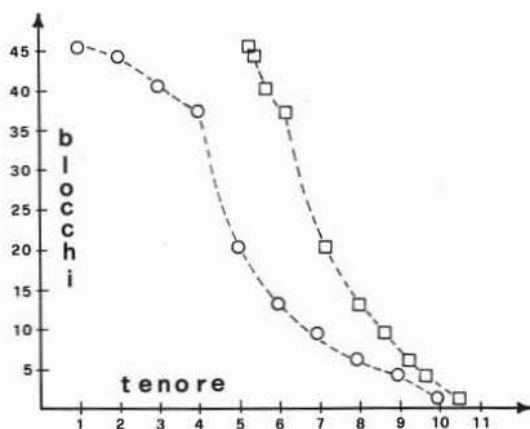


Fig. 7 b. — Curve relative alla riga O della tab. 4, caso dei dati considerati come provenienti da popolazioni differenti. Con O è indicata la curva tenore cut-off/numero blocchi. Con □ è indicata la curva numero blocchi/tenore medio. — Curves in the non homogeneous case. O = Curve cut-off grade vs number of blocks. □ = Curve number of block vs average grade in non homogeneous case.

ed è grazie allo smorzamento dovuto alla media dei campioni che stanno sulla stessa riga nello schema a sei punti che si ottiene una valutazione migliore rispetto a quella ottenuta con lo schema a nove.

Conclusioni

Come si è potuto notare, un semplice cambiamento dello schema di krigaggio è stato sufficiente a limitare in maniera anche rilevante gli errori di valutazione di una serie di blocchi facendo delle considerazioni sull'andamento dei valori dei dati in esame. In particolare, nel caso sopra discusso, si è tenuto conto solo dell'effetto « trend » della sola zona strutturata.

Questo fa immaginare quale possa essere l'importanza di non sottovalutare lo studio geogiacimentologico di base sulla mineralizzazione in esame, anche perché esistono molte caratteristiche dei giacimenti minerari non quantizzabili; ma che potrebbero essere di grandissimo aiuto nella valutazione e che il solo geostatistico, per sua formazione culturale, non è in grado di interpretare nel suo pieno significato (strutture, allineamenti, faglie, presenza di zone di ossidazione o di cementazione ecc.). Tali proprietà possono

però diventare insostituibili nella valutazione di certi giacimenti o solo di alcune parti di essi (caso in cui solo una parte del giacimento si presenti disturbata). Pertanto una assenza delle competenze geogiacimentologiche potrebbe portare ad una valutazione che avrebbe in sé un'errore che potremmo definire « mascherato », in quanto non è possibile, nella maggior parte dei casi, accorgersi di essere in situazioni di non omogeneità nei dati con le sole tecniche statistiche. Solo durante la verifica, al momento della coltivazione, questo errore sarebbe evidente, con un rischio economico, forse grave, per l'azienda mineraria che conduce i lavori.

In questo lavoro è stato preso in esame un esempio abbastanza semplice in cui i dati non sono facilmente differenziabili con le sole tecniche statistiche. Sembra però abbastanza evidente, considerando il parallelo giacimentologico fatto nella presentazione dei dati, che una dettagliata descrizione geogiacimentologica avrebbe consentito di individuare abbastanza agevolmente le due zone, alterata e non, del corpo. Questa separazione avrebbe consentito di ottenere una valutazione più corretta dal punto di vista statistico; in quanto è necessario che i dati siano omogenei perché la loro elaborazione dia risultati attendibili come, d'altra parte, affer-

ma M. Guarascio (1974): nel caso si sia in presenza di « eterogeneità marcata tra due zone dello stesso giacimento; bisogna ovviamente studiare separatamente le due zone ». Anche se, nel caso pratico e come nell'esempio proposto, può verificarsi che il bilancio finale non risenta sensibilmente delle conseguenze derivanti da una elaborazione non completamente corretta dei dati. Il che, da

un punto di vista statistico, può considerarsi « casuale ».

Ringraziamenti. — L'autore desidera ringraziare i proff. S. PRETTI, R. VALERA e I. URAS per i preziosi suggerimenti e per la loro lettura critica del presente lavoro.

Lavoro eseguito con il contributo 60 % MPI, a seguito di una borsa di studio CNR NATO presso l'École Nationale Supérieure des Mines, Parigi.

BIBLIOGRAFIA

- DAVID M. (1977) - *Geostatistical ore reserve estimation*. Elsevier, Amsterdam, pp. 364.
- GUARASCIO M. (1984) - *Valutazione dei giacimenti minerari. L'approccio geostatistico*. Industria Mineraria, XXV, 1-20.
- JOURNELL A., HUIJBREGTS CH. (1978) - *Mining geostatistics*. Academic Press, London, pp. 600.
- MATHERON G. (1970) - *La théorie des variables régionalisées et ses applications*. Le cahiers du Centre de Morphologie Mathématique, Fasc. 5, ENSMP, Paris, pp. 212.
- MAZZELLA A., PRETTI S., VALERA R. (1983) - *Valutazione dei giacimenti e geostatistica: Rischi e prospettive*. Industria Mineraria, 6, 23-27.
- MAZZELLA A., PRETTI S., VALERA R. (1984 a) - *Valutazione dei giacimenti e geostatistica. Nota 2: Il semivariogramma e la realtà giacimentologica*. Industria Mineraria, 2, 15-18.
- MAZZELLA A., PRETTI S., VALERA R. (1984 b) - *A scanning technique for the recognition of different mineralization in an ore-body*. Computer in Earth sciences for natural resources characterizations, Coll. Int. 9-13 Aprile 1984, pp. 527-547.
- MAZZELLA A. (1986) - *P-krige: un programma in basic per il calcolo dei pesi di krigaggio nel caso bidimensionale*. In corso di stampa sulla A.M.Sa.
- RENDU J.M. (1978) - *An introduction to geological methods of minerals evaluation*. S. Afr. Inst. Min. Metall. Johannesburg, pp. 84.