

MOSÈ BALCONI

Assi di inversione e sistematica delle classi di simmetria.

Uno dei modi più adatti per far riconoscere e risaltare le correlazioni esistenti tra le diverse classi e sistemi cristallini è la loro classificazione in base agli elementi di simmetria indipendenti: considerando infatti solo quegli elementi la cui coesistenza è necessaria e sufficiente per caratterizzare la simmetria delle varie sostanze cristallizzate, appaiono in più immediata evidenza le analogie e le differenze tra le varie classi cristalline, e più facile riesce seguire il nesso logico che tutte le classi collega.

Multiple evidentemente sono le possibilità di classificazione, potendosi assumere come elementi guida l'uno o l'altro tipo di elementi di simmetria e studiando poi tutte le loro combinazioni ammissibili con la legge di HAÛY. Classificazioni sono state pubblicate da vari autori: una, particolarmente evidente, fu proposta nel 1927 dal prof. PANICHI (Bibl. n. 25), adottando come elementi ordinatori gli assi di simmetria, sia di tipo girico, sia di tipo giroidico (assi giro-specchio ⁽¹⁾), quest'ultimi opportunamente estesi dal caso di $A_{n(2n)}$ a quello di $A_{n(n)}$ ⁽²⁾.

Esaminando le associazioni di questi assi tra di loro e con piani di simmetria, il prof. PANICHI mostrò come tutte le possibili classi cristalline si possano ricavare « con la semplice ammissione (come elementi di simmetria indipendenti) di non più di due assi e di non più di due piani ».

⁽¹⁾ O assi-specchio, o assi di simmetria alterna.

⁽²⁾ In questi simboli il primo indice dà l'ordine dell'asse pensato come girico, mentre tra parentesi è indicato l'ordine dell'asse pensato come giroide.

Gli assi $A_{n(n)}$ corrispondono solo formalmente a nuovi elementi di simmetria, non rappresentando in realtà null'altro che l'associazione di un asse girico A_n con il piano di simmetria ad esso normale.

Un altro concetto che giova a far risaltare in modo semplice ed elegante le correlazioni di simmetria tra le classi è quello di considerare come fondamentali (o primitive od originarie (Urformen) ⁽¹⁾) le forme dovute ai più semplici insiemi di elementi di simmetria, esaminando il loro ripetersi ritmico col variare dell'ordine dell'asse che si considera come verticale.

Classificazioni di questo tipo sono quelle ben note di TSCHERMAK, BECKE, RINNE (Bibl. n. 8, 26, 27).

Noto per altro che la classificazione ad elementi di simmetria indipendenti, basandosi solo sui teoremi sulla simmetria, non implica particolari ipotesi di derivazione.

Dopo le discussioni del periodo 1927-1931 (Bibl. n. 26-38), culminate con l'adozione dell'asse di inversione nelle Internationalen Tabellen zur Bestimmung der Kristallstrukturen (1935), si è andata affermando internazionalmente la utilità di adottare questo elemento di simmetria come asse di 2^a specie ⁽²⁾ al posto dell'asse-specchio (vedi ad es. i trattati di RINNE-BEREK (1934), RAAZ-TERTSCH (1939), BIJVOET-KOLKMEYER-MAC GILLAVRY (1940), NIGGLI, III ed., (1941)); ed io ho pensato, durante gli ozii del campo di internamento, di applicare l'asse di inversione alla classificazione del prof. PANICHI (che mi fu facile ricostruire per la sua grande semplicità), ottenendone la tabella che più sotto riporterò. Al ritorno lo studio sistematico della bibliografia mi ha appreso che tabelle molto simili o quasi coincidenti sono state ottenute, seppure partendo da concetti o con scopi

⁽¹⁾ È quasi superfluo rilevare che l'espressione « Urformen » è puramente convenzionale, non essendo collegata ad alcun processo naturale di reale derivazione.

⁽²⁾ Asse di 2^a specie (o giroide) si definisce quello in cui il ricoprimento non avviene per semplice rotazione (asse girico), ma solo per effetto di una duplice simultanea operazione: o rotazione e specchiamento rispetto ad un piano normale all'asse (asse-specchio), o rotazione intorno ad un asse accompagnata da una inversione rispetto ad un punto giacente sull'asse (asse di inversione).

diversi, da vari altri autori (per es. SAUREL (1912), VALETON (1928), MAUGIN (1931), TERTSCH (1916 e 1940)); ma mi induco a pubblicarla ugualmente, onde far rilevare ancora una volta i vantaggi che l'asse di inversione presenta, per la sistematica delle classi cristalline, rispetto all'asse-specchio.

In realtà i due concetti di asse di inversione e di asse-specchio sono praticamente equivalenti. Ciò è particolarmente evidente nell'unico caso in cui l'asse di 2^a specie si presenta in natura come elemento di simmetria irriducibile: la simmetria della classe bisfenoidale tetragonale si può interpretare ugualmente bene come dovuta ad un asse-specchio di ordine 4 ($A_{2(4)}$), o ad un asse d'inversione di pari ordine (A_4)⁽¹⁾.

Nel caso in cui siano di ordine diverso da 4, sia gli assi-specchio che gli assi d'inversione sono riconducibili ad un insieme di più altri elementi di simmetria (assi girici più piano o centro), come si vede dalla tabella di equivalenza degli assi giroidi, che qui riporto:

Assi di simmetria composta

Assi di simmetria alterna		Assi di inversione
$A_{n(n)}$	$A_{n(2n)}$	A_n
$A_{1(1)} \equiv P \equiv A_2$		$A_1 \equiv C \equiv A_{1(2)}$
	$A_{1(2)} \equiv C \equiv A_7$	$A_2 \equiv P \equiv A_{1(4)}$
$A_{2(2)} \equiv A_2 \ P \equiv A_2 \ C$		$A_3 \equiv A_3 \ C \equiv A_{3(6)}$
	$A_{2(4)} \equiv A_4$	$A_4 \equiv A_{2(4)}$
$A_{4(4)} \equiv A_4 \ P \equiv A_4 \ C$		$A_6 \equiv A_3 \ P \equiv A_{3(3)}$
$A_{3(3)} \equiv A_3 \ P \equiv A_6$		
	$A_{3(6)} \equiv A_3 \ C \equiv A_7$	
$A_{6(6)} \equiv A_6 \ P \equiv A_6 \ C$		

(1) L'ordine dell'asse di inversione si indica nello stesso modo che per gli assi girici, ma con la cifra soprastegnata. (p. es. A_4 e A_7 indicano rispettivamente gli assi girico e giroide d'inversione d'ordine 4).

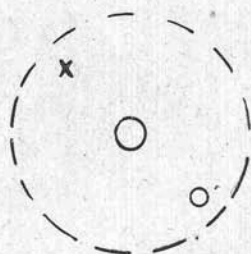
Si tratta quindi di esaminare quale dei due concetti sia preferibile adottare per ottenere una successione il più possibile conseguente delle trentadue classi di simmetria, tale da permetterci di meglio rilevare le corrispondenze tra le singole classi e tra i diversi sistemi.

Ricordando che, per la legge di HAÜY, gli unici assi girici possibili in cristallografia sono quelli di ordine 1, 2, 3, 4, 6 (se si considera con SCHOENFLIES (II Ed., 1923, p. 11) come asse A_1 l'identità, che di per sè non corrisponde ad alcuna simmetria, poichè equivale ad una rotazione di angolo 0°) appare dalla tabella di equivalenza che mentre per gli assi di inversione si hanno tutti i 5 assi corrispondenti, per gli assi-specchio sono possibili solo i 3 assi di tipo $A_{n(2n)}$ per cui $2n \leq 6$, accanto ai 5 di tipo $A_{n(n)}$; però di questi ultimi i 3 assi ad n pari, non possono essere considerati come veri elementi di simmetria, in quanto, come ha già fatto notare il prof. PANICHI, dei due tipi di operazione eseguibili con elementi di simmetria (1. ricoprimento della forma con sè stessa; 2. ottenimento della forma completa a partire da una faccia, mediante il ripetersi dell'operazione tipica dell'elemento sino a riottenere l'identità⁽¹⁾) è per essi eseguibile solo il primo⁽²⁾.

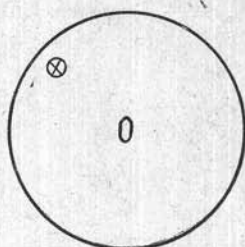
Il confronto va quindi limitato ai 5 assi di inversione ed agli assi-specchio $A_{1(1)}$, $A_{2(2)}$, $A_{3(3)}$, $A_{4(4)}$, $A_{6(6)}$, elementi di simmetria che con vario ordine si equivalgono, come già appare dalla tabella su riportata. Essi sono qui riprodotti insieme alla proiezione stereografica delle forme che da loro si ottengono:

(¹) Nel caso dell'asse di inversione per n o $2n$ operazioni a seconda che l'asse di inversione è di ordine pari o dispari.

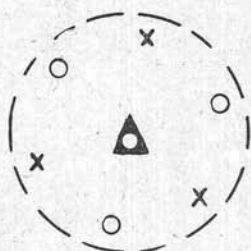
(²) Osserviamo che mentre per i 3 $A_{n(n)}$ ad n pari si ottiene così solo la metà delle facce e non altre, per i 2 assi di inversione ad n dispari (A_1 e A_3) si possono ottenere tutte le facce della forma, ma solo dopo $2n$ operazioni.



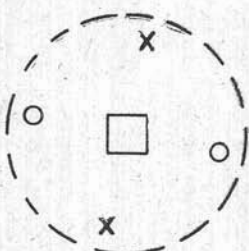
$$A_1 \equiv A_{1(2)} \equiv C$$



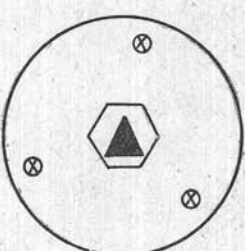
$$A_2 \equiv A_{1(1)} \equiv P$$



$$A_3 \equiv A_{3(6)} \equiv A_3 C$$



$$A_4 \equiv A_{2(4)}$$



$$A_5 \equiv A_{3(3)} \equiv A_3 P$$

È bene notare che questi cinque elementi di simmetria hanno un significato reale, intrinseco, in quanto A_1 , A_2 , A_4 ⁽¹⁾ indicano elementi di simmetria di per sè stanti (C , P , A_1), mentre A_3 e A_5 ⁽¹⁾ esprimono la simmetria delle uniche due classi in cui con gli elementi di simmetria soliti (assi girici, piano, centro) la simmetria è rappresentata da soli due elementi e manca quel terzo elemento (appunto l'asse di seconda specie), che riporti direttamente dalla posizione raggiunta attraverso l'azione successiva dei due elementi di simmetria, alla posizione iniziale. Adottando invece anche in queste due classi gli assi giroidi, esse vengono a perdere il loro carattere di eccezione, e rientrano

⁽¹⁾ E i loro corrispondenti assi-specchio.

tra le 10 classi ad un solo elemento di simmetria (5 ad assi girici e 5 ad assi giroidi).

Al confronto diretto tra i singoli assi di inversione e di simmetria alterna non è forse inutile premettere qualche considerazione di carattere più generale. Se noi esaminiamo le sostanze cristalline di minor simmetria, vediamo che la prima reale operazione di simmetria che si incontra nel mondo dei cristalli è l'inversione ed il primo elemento di simmetria è il centro.

Il centro di simmetria è già presente in cristalli i cui assi cristallografici hanno un orientamento non precondizionato (sistema triclino $\alpha \neq \beta \neq \gamma$), mentre la simmetria per specchiamento ha un'influenza sulla disposizione degli assi cristallografici (sistema monoclinio $\alpha = \gamma = 90^\circ$, $\beta > 90^\circ$). Poichè la rotazione è operazione di per sè eseguibile su qualunque corpo (e quindi anche sui cristalli) mi pare più logico, per spiegare le simmetrie cristalline, associare alla rotazione l'inversione piuttosto che lo specchiamento, sebbene questo sia, da un punto di vista puramente morfologico, forse di più immediata evidenza ⁽¹⁾.

Data l'appartenenza della cl. pinacoidale al sistema triclino, appare preferibile rappresentare il centro di simmetria piuttosto come A_1 che come $A_{1(2)}$; nelle due classi del sistema triclino figurano così solo assi di ordine 1 e non interviene nessuna simmetria di rotazione, nè girica nè giroide. Il piano di simmetria è d'altro lato l'unico elemento di simmetria della cl. domatica del sistema monoclinio, e la sua simmetria è esprimibile con un asse (di inversione) di ordine 2 (A_2) ⁽²⁾, analogamente a quanto accade per le

⁽¹⁾ Sull'importanza dell'inversione rispetto allo specchiamento nei riguardi delle proprietà fisiche, hanno insistito particolarmente il VOIGT, il TERTSCH, il RAAZ (Bibl. n. 12, 15, 46, 47).

⁽²⁾ Con la simboleggiatura A_2 il piano di simmetria viene rappresentato dalla direzione della sua normale, similmente a quanto avviene per le facce dei cristalli nelle misure goniometriche. In generale, come fa notare il NIGGLI nel suo trattato (3^a ed., 1941, p. 30) « la scelta della

altre due classi dello stesso sistema: la cl. sfenoidale (che possiede un asse girico binario (A_2)) e la cl. prismatica (che ha un asse girico ed un asse giroide binari oltre al centro di simmetria); con l'uso degli assi-specchio la simmetria domatica dovrebbe essere invece rappresentata da un $A_{1(1)}$; la simboleggiatura farebbe quindi pensare che la simmetria di questa classe fosse minore di quella della classe pinacoidale ($A_{1(2)}$), mentre ciò non è se si tien conto, come ho fatto sopra, dell'orientamento delle croci assiali.

I vantaggi dell'asse A_3 (e A_5) rispetto al corrispondente $A_{3(3)}$ (e $A_{3(3)}$) appaiono particolarmente evidenti nei rispetti della sistematica delle classi e del loro raggruppamento in sistemi e di essi tratterò più oltre a questo proposito. Quanto all' A_4 ho già ricordato la sua perfetta equivalenza con l' $A_{2(4)}$; qui il vantaggio è di carattere più puramente formale e generale, in quanto per omogeneità di trattazione è preferibile adottare anche qui l'asse di inversione, data la superiorità di questo elemento di simmetria in tutti gli altri casi.

Le 22 classi di simmetria cristallina che posseggono più di un asse (girico o giroide di inversione) si possono ottenere come tutte le combinazioni non equivalenti, ammissibili con le leggi fondamentali della cristallografia, dei 5 assi girici e 5 assi giroidi di inversione già ricordati.

Si ottiene così globalmente la tabella a pag. 60, in cui le varie classi si hanno partendo dai singoli assi girici e giroidi e considerando via via tutte le possibili combinazioni cristallografiche tra di loro e con quelli che li precedono, tenendo conto del seguente ordine di simmetria crescente:

$$A_1, A_1, A_2, A_2, A_3, A_3, A_4, A_4, A_5, A_5.$$

rotazione e dell'inversione (compresa la rotazione con inversione) come operazioni fondamentali ha il grande vantaggio che si utilizzano accanto al punto solo delle direzioni ».

Gli assi di inversione di ordine dispari rappresentano infatti una simmetria maggiore degli assi girici corrispondenti, in quanto equivalgono agli stessi assi girici più il centro di simmetria ⁽¹⁾, mentre gli assi di inversione di ordine pari, essendo contemporaneamente assi girici di ordine dimezzato, corrispondono evidentemente ad una minore simmetria rispetto agli assi girici dello stesso ordine.

L'ordine per le classi dei sistemi triclini e monoclini è quindi:

1. A_1 cl. pedale
2. A_1 cl. pinacoidale
3. A_2 ⁽²⁾ cl. domatica
4. A_2 cl. sfenoidale
5. $A_2 A_1$ cl. prismatica

Se ora a un asse girico binario verticale si aggiunge un asse giroide binario prima ed un asse girico binario poi (disposti orizzontalmente ⁽³⁾), si ottengono le prime due classi del sistema rombico:

6. $A_2 A_2$ cl. piramidale rombica
7. $A_2 A_2$ cl. bisfenoidale rombica.

⁽¹⁾ Per questo alcuni (ad es. VOIGT (Bibl. n. 12) e RAAZ (Bibl. n. 47)) non li considerano come elementi di simmetria di per sè stanti, anche per la già ricordata caratteristica che la forma completa si ottiene solo dopo $2n$ rotazioni, mentre dopo n rotazioni si giunge solo alla posizione centro-simmetrica rispetto alla iniziale.

⁽²⁾ Si trascurano le combinazioni con A_1 , sempre possibili, e quelle di più A_1 , poichè un cristallo non può avere, macroscopicamente, più di un centro di simmetria.

⁽³⁾ È da notare che, tenendo conto dell'orientazione degli assi, il sistema monoclini rientrerebbe nel sistema triclini e si dovrebbe considerare come la combinazione, analogamente a quanto accade negli altri sistemi, di un asse binario (girico o giroide) orizzontale coll'asse verticale di ordine 1. Qualcuno infatti (es. Bibl. n. 17) considera i 2 sistemi come costituenti un unico sistema monogonale, di cui la tabella fa risaltare immediatamente il parallelismo coi sistemi romboedrico e cubico, essi pure dotati di uno o più assi di ordine dispari.

L'ultima classe del sistema si ottiene combinando due assi binari ortogonali (sia due girici, sia due giroidi, sia uno girico e uno giroide) con il centro di simmetria. Io ho adottato la simmetria maggiore:

8. $A_2 A_2 A_1$ cl. bipyramidale rombica.

Si conclude così con l'esaurimento di tutte le combinazioni possibili tra assi di ordine 1 e 2, il sistema rombico ed il gruppo trimetrico (¹).

Si hanno successivamente, nel gruppo dimetrico, i sistemi in cui un asse verticale di simmetria (sia girica sia giroide) di ordine superiore a 2 si combina in tutti i possibili modi con gli assi (sia girici che giroidi) di ordine 1 e 2 e con le loro combinazioni (tutte equivalenti a $A_2 A_1$):

$$A_1, A_1, A_2^{(2)}, A_2, A_2 A_1^{(3)}.$$

A seconda dell'ordine di questo asse verticale si hanno i tre sistemi trigonale (romboedrico), tetragonale ed esagonale.

(¹) Altri invece ((Bibl. n. 13, 14 e 11, ed, in parte, SCHOENFLIES, 1^a ed. (1891) e VIOLA (Bibl. n. 3)), astruendo dal consueto orientamento degli elementi di simmetria, è portato a fare dei 2 sistemi monoclino e rombico un unico sistema binario o digonale (ad asse verticale (?) binario) di cui la tabella permette di riconoscere l'analogia con i sistemi tetragonale ed esagonale, tenendo conto che la classe $A_2 A_2$ viene a mancare come classe a sè nel sistema digonale, in quanto, per l'ordine dell'asse verticale, essa viene a coincidere; salvo l'orientamento, con la classe $A_2 A_2$.

(²) L'asse A_2 , essendo girico di ordine 1, può anche essere disposto parallelamente all'asse verticale girico (equivale al piano di simmetria ad esso normale) senza modificarne l'ordine.

(³) La combinazione di questi 5 elementi con i diversi assi verticali costituisce appunto il « ritmo di ripetizione » del RINNE (Bibl. n. 27 e n. 34 e RINNE-BEREK: *Anleitung zu optischen Untersuchungen mit dem Polarisationsmikroskop*, 1934, p. 35), che indica i 5 casi (gradi) con le lettere p (pedio), i (pinacoide: inversione), d (doma), s (sfenoide), sd (prisma). Meglio sarebbe, forse, accettando come egli fa l'asse d'inversione, indicare l'ultimo caso con is. Nella derivazione del RINNE poi la derivazione delle classi ad assi giroidi di ordine 4 e 6 non appare troppo evidente.

Dalle associazioni cristallograficamente possibili di più assi di ordine superiore a 2 (A_3 , A_3 , A_3 , A_4) si hanno poi le 5 classi del sistema cubico (gruppo monometrico).

Dalla tabella risulta che l'analogia tra i sistemi tetragonale ed esagonale diventa completa e perfetta quando si adotti l'asse di inversione A_6 . Così vengono a raggrupparsi nel sistema esagonale le due classi bipiramidali trigonali (che il TERTSCH appunto per questo propose di chiamare emiesagonali (Bibl. n. 15, p. 152)), corrispondentemente alla simmetria del loro edificio cristallino, quale è stato riconosciuto attraverso l'esame strutturale roentgenografico, mentre adoperando l'asse-specchio ($A_{3(3)}$) esse dovrebbero far parte del sistema trigonale.

D'altro lato con l'adozione dell' A_3 rientrano naturalmente nel sistema trigonale le due classi romboedrica e scalenoedrica ditrigonale, che, usando invece l' $A_{3(6)}$, si sarebbe indotti (come talora è stato fatto, vedi citazioni in Bibl. n. 47) ad affiancare alle classi del sistema esagonale.

Anche qui lo studio strutturale ha dimostrato che queste due classi, con le classi piramidale trigonale, piramidale ditrigonale e trapezoedrica trigonale, posseggono una cella elementare romboedrica, per cui queste 5 classi si possono riunire in un sistema romboedrico, di cui la tabella mette in luce le note analogie con il sistema cubico, dovute all'esistenza in ambedue i sistemi di (uno o più) assi ternari (¹). Adottando gli assi di inversione le 5 classi del sistema romboedrico sono le sole che posseggono un asse di simmetria ternaria e quindi il sistema romboedrico viene ad identificarsi col sistema trigonale, che viene così a possedere una classe olosimmetrica in

(¹) Con l'adozione degli assi di inversione l'ordine delle 5 classi del sistema cubico viene definito in modo univoco.

analogia con tutti gli altri sistemi ⁽¹⁾. Esso viene inoltre a differenziarsi nettamente dal sistema esagonale, come vuole il diverso tipo di reticolo che è alla base dei due sistemi.

Oltre che nella classificazione ad elementi di simmetria indipendenti gli assi di inversione si possono applicare anche nella simboleggiatura della simmetria completa delle classi (v. ultima colonna della tabella), dove mi pare che l'adozione dell'asse giroide A_2 invece del piano di simmetria renda ancora più evidente il principio costruttivo delle varie classi e le analogie loro e tra i sistemi.

Pavia, Istituto di Mineralogia dell' Università.

⁽¹⁾ Con gli elementi di simmetria soliti il sistema trigonale viene a raggruppare le 7 classi che presentano l'asse girico ternario e mentre non possiede nessuna classe olosimmetrica, non può neppure essere identificato col sistema romboedrico.

Elementi di simmetria nelle classi cristalline
(Assi girici e giroidi di inversione)

N.	Sistema e sezione	Classe	Elementi di simm. indipendenti	Simmetria completa
1	Triclinio	Pediale	A_1	$A_1 (-)$
2		Pinacoidale	A_1	$A_1 (C)$
3		Domatrica	A_2	$A_2 (P)$
4	Monoclino	Sfenoidale	A_2	A_2
5		Prismatica	$A_2 A_1$	$A_2 A_2 A_1$
6		Piramidale rombica	$A_2 A_2$	$A_2 A'_2 A''_2$
7	Rombico	Bisfenoidale rombica	$A_2 A_2$	$A_2 A'_2 A''_2$
8		Bipiramidale rombica	$A_2 A_2 A_1$	$A_2 A'_2 A''_2 A_2 A'_2 A''_2 A_1$
9		Bisfenoidale tetragonale	A_4	$A_4 (A_{2(4)})$
10	Tetragonale	Sez. adasse di inver.	$A_1 A_2$	$A_4 2A'_2 2A''_2$
11		Piramidale tetragonale	A_4	A_4
12		Bipiramidale tetragonale	$A_4 A_1$	$A_4 A_2 A_1$
13		Sez. adasse girico	$A_4 A_2$	$A_4 2A'_2 2A''_2$
14		Trapezoedrica tetragonale	$A_4 A_2$	$A_4 2A'_2 2A''_2$
15		Bipiramidale ditetragonale	$A_4 A_2 A_1$	$A_4 2A'_2 2A''_2 A_2 2A'_2 2A''_2 A_1$

16			Piramidale trigonale	A_3	A_3
17			Romboedrica	$A_3 (A_3 A_1)$	$A_3 (A_3 C)$
18	Trigonale o romboedrico		Piramidale ditrigonale	$A_3 A_2$	$A_3 3A_2$
19			Trapezoedrica trigonale	$A_3 A_2$	$A_3 3A_2$
20			Scalenoedrica ditrigonale	$A_3 A_2 (A_3 A_2 A_1)$	$A_3 3A'_2 3A''_2 (A_3 3A'_2 3A''_2 A_1)$
21		Sez.adasse	Bipiramidale trigonale	A_6	$A_6 (A_3 P)$
22		di inver.	Bipiramidale ditrigonale	$A_6 A_2$	$A_6 3A'_2 3A''_2$
23			Piramidale esagonale	A_6	A_6
24	Esagonale	Sez.adasse	Bipiramidale esagonale	$A_6 A_1$	$A_6 A_2 A_1$
25		girico	Piramidale diesagonale	$A_6 A_2$	$A_6 3A'_2 3A''_2$
26			Trapezoedrica esagonale	$A_6 A_2$	$A_6 3A'_2 3A''_2$
27			Bipiramidale diesagonale	$A_6 A_2 A_1$	$A_6 3A'_2 3A''_2 A_2 3A'_2 3A''_2 A_1$
28			Pentagonododec. tetraedrica	$A_3 A_3$	$4A_3 3A_2$
29			Diacisdodecaedrica	$A_3 A_3 (A_3 A_3 A_1)$	$4A_3 3A_2 3A_2 (4A_3 3A_2 3A_2 A_1)$
30	Cubico		Esacistetraedrica	$A_3 A_1$	$4A_3 3A_4 6A'_2$
31			Icositetraedrica pentagonale	$A_3 A_4$	$4A_3 3A_4 6A'_2$
32			Esacisottaedrica	$\left\{ \begin{array}{l} A_3 A_4 \\ (A_3 A_4 A_1) \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} 4A_3 3A_4 6A'_2 3A_2 6A'_2 \\ (4A_3 3A_4 6A'_2 3A_2 6A'_2 A_1) \end{array} \right.$

P. S. - I sistemi trigonale e tetragonale possono anche invertire il loro posto.

BIBLIOGRAFIA

N.B. - Sono citati solo i lavori originali consultati dall'A.

- 1) 1894. B. MINNIGERODE: Ueber die Symmetrieverhältnisse der Krystalle, N. Jahrb. Min. 1894, I, p. 92-97.
- 2) F. BECKE: Ein Wort über das Symmetriecentrum, Z. Kr. 25, p. 73-78.
- 3) 1896. C. VIOLA: Elementare Darstellung der 32 Krystallklassen, Z. Kr. 27, p. 1-40.
- 4) 1897. G. WULFF: Die Symmetrieebene als Grundelement der Symmetrie, Z. Kr. 27, p. 556-58.
- 5) 1900. A. SCHMIDT: Die Klassen der Krystalle, Z. Kr. 33, p. 620-28.
- 6) 1901. W. BARLOW: Die Symmetrie der Krystalle. Die wirkliche Grundlage der 32 Symmetrieklassen, Z. Kr. 34, p. 1-36.
- 7) 1902. R. PANEBIANCO: Su d'una simboleggiatura semplice delle classi e dei sistemi cristallini, Riv. Min. Crist. It. 28, p. 13-25.
- 8) 1904. G. TSCHERMAK: Einheitliche Ableitung der Krystallisations- und Zwillingsgesetze, Z. Kr. 39, p. 433-56.
- 9) 1907. H. HILTON: Note on the thirty-two classes of symmetry, Min. Mag. 14, p. 261-63.
- 10) J. W. EVANS: Annotation of the thirty-two classes of symmetry, Min. Mag. 14, p. 360-64.
- 11) 1910. J. W. EVANS: Axes of symmetry and the crystallographic classes, Min. Mag. 15, p. 398-400.
- 12) W. VOIGT: Lehrbuch der Krystallphysik, Leipzig (rist. 1928), p. 59-103.
- 13) 1911. P. SAUREL: Ueber die Nomenclatur der Krystallographie, Z. Kr. 50, p. 1-5.
- 14) 1912. P. SAUREL: On the classification of crystals, Bull. Am. Math. Soc. 1911, 17, p. 398-409; v. N. Jahrb. Min. 1912, II, p. 161-63.
- 15) 1916. H. TERTSCH: Zur Gruppierung der 32 Kristallklassen, Cbl. Min. 1916, p. 145-154 e 171-180.
- 16) 1920. J. RECKENKAMP: Syngonie und Raumgitter, Fortsch. Min. 6, p. 15-34.
- 17) 1921. J. BECKENKAMP: Ueber symmetrischen Auf- und Abbau der Kristalle, Z. Kr. 56, p. 305-34.
- 18) 1922. J. BECKENKAMP: Einteilung der Kristalle nach ihrer Flächenumgrenzung, Z. Kr. 57, p. 345-58.
- 19) 1925. S. KREUTZ: Ein Wort über das Symmetriezentrum, Tsch. Min. Petr. Mitt. 38, p. 382-91.

- 20) A. K. BOLDIREW; Die vom Fedorow-Institut angenommene kristallographische Nomenklatur, Z. Kr. 62, p. 145-50.
- 21) 1926. A. F. ROGERS: A mathematical study of crystal symmetry, Proc. Amer. Acad. Arts Sci., 61, p. 161-203; rif. Min. Abstr. III, p. 239.
- 22) J. BECKENKAMP: Der Kristall als homogenes Polieder, N. Jahrb. Min. A. BB. 54, p. 1-71.
- 23) 1927. J. BECKENKAMP: Bemerkungen zur analytischen und synthetischen Ableitung der 32 Symmetrieklassen, Cbl. Min. A, 1927, p. 113-17.
- 24) E. T. WHERRY: Names for the symmetry-classes based on axes, Amer. Miner. 12, p. 218-20.
- 25) U. PANICHI: Elementi di simmetria indipendenti di I e di II specie, Rend. R. Acc. Naz. Lincei, Cl. Fis. Mat. VI, s. 6^a, p. 326-330.
- 26) F. BECKE: Vorschläge zur Systematik und Nomenklatur der 32 Symmetrieklassen, Fortsch. Min. 12, p. 97-106.
- 27) F. RINNE: Bemerkung zur kristallographischen Nomenklatur, Ibid. p. 107-11; Z. Kr. 66, p. 467-71.
- 28) E. SCHIEBOLD: Ueber eine neue Herleitung und Benennung der 230 Raumgruppen, Ibid. p. 112-118; Z. Kr. 66, p. 471-77.
- 29) 1928. F. BECKE: Inversionsachse und Spiegelachse, N. Jahrb. Min. BB. 57 A, p. 173-202.
- 30) P. NIGGLI: Das Universalsymmetrieelement, Ibid. p. 617-30.
- 31) J. J. P. VALETON: Ueber die Bedeutung des Symmetrie-Zentrums für die Ableitung und die Systematik der 32 Kristallklassen, Ibid. p. 763-84.
- 32) E. T. WHERRY: Arrangement of the symmetry classes, Amer. Min. 13, p. 198-99.
- 33) A. F. ROGERS: A tabulation of the 32 crystal classes, Ibid. p. 571-77.
- 34) 1929. F. RINNE: Zur Nomenklatur der 32 Kristallklassen, Abhand. d. Math. Phys. Kl. d. Säch. Akad. d. Wissensch. B. XL, n. V, p. 1-8.
- 35) E. SCHIEBOLD: Ueber eine neue Herleitung und Nomenklatur der 230 kristallographischen Raumgruppen (mit Atlas), Ibid. p. 9-204.
- 36) 1930. V. GOLDSCHMIDT: Zur kristallographischen Systematik, Cbl. Min. A. 1930, p. 177-190.
- 37) 1931. C. MAUGIN: Sur le symbolisme des groupes de répétition ou de symétrie des assemblages cristallins, Z. Kr. 76, p. 542-58.

- 38) 1932. F. RINNE, E. SCHIEBOLD, E. SOMMERFELDT: Bericht des von der Deutschen Mineralogischen Gesellschaft eingesetzten Nomenklaturausschusses über die Kristallklassen und Raumgruppen, Fortsch. Min. 16, p. 29-45.
- 39) 1934. W. SOLLER: Logical symbols for point symmetry groups, Amer. Min. 19, p. 412-20.
- 40) W. KLEBER: Ueber die Ableitung der 32 Klassen mit funktionentheoretischen Hilfsmitteln, Zbl. Min. A. 1934, p. 241-50.
- 41) A. K. BOLDYREW, W. W. DOLIWO-DOBROWOLSKY: Klassifikation, Nomenklatur und Symbole der 32 kristallographischen Symmetriarten, Ann. Inst. Mines. Leningrad, 8, p. 145-59; rif. N. Jahrb. Min. Ref. I, 1935, p. 404-5.
- 42) S. M. ROMANOW: Ueber die Bezeichnung kubischer Symmetrieklassen und über Drehspiegelungsachsen, Mém. Soc. Russe Min. (2) 63, p. 230-35; rif. N. Jahrb. Min. Ref. I, 1936, p. 10.
- 43) J. A. DMITRIJEW: Ueber den Ersatz von Spiegelungen eines Punktsystems an drei Ebenen durch eine Inversionsachse, Ibid. p. 405-12; rif. Ibid. p. 10.
- 44) 1935. D. J. FISHER: Crystal classification and symbolism, Amer. Min. 20, p. 292-306.
- 45) J. D. H. DONNAY: Alternating axes and symmetry symbols in crystallography, Journ. Washington Ac. Sci. 25, p. 476-88; rif. N. Jahrb. Min. Ref. I, 1937, p. 129.
- 46) 1936. H. TERTSCH: Noch ein Wort zur Ableitung und Benennung der 32 Kristallklassen, Zbl. Min. A. 1936, p. 161-66.
- 47) 1938. F. RAAZ: Zur Frage der Systematik und Herleitung hexagonaler und trigonaler Kristallklassen. Zugleich ein Wort für die Inversionsachse, Zbl. Min. A. 1938, p. 173-85.
- 48) 1940. H. TERTSCH: Bemerkungen zur Herleitung der 32 Kristallklassen, Z. Kr. 102, p. 209-15.